Modélisation Biomécanique

Introduction

Nicolas Bideau nicolas.bideau@univ-rennes2.fr
Charles Pontonnier charles.pontonnier@ens-rennes.fr

DIGISPORT GRADUATE SCHOOL

Objectifs et contenus du cours

Objectifs
Maîtriser les principaux concepts de modélisation biomécanique
Définir des besoins en terme de modélisation biomécanique
Définition des principaux termes en analyse de mouvement
Modéliser un système biomécanique rigide en translation et en rotation

Contenus
Introduction générale sur la modélisation biomécanique et adaptations du niveau de modélisation en rapport avec l'objectif visé
Principes généraux de mécanique du solide rigide
Principes de mécanisme (degrés de liberté, mobilité, contraintes, paramétrage, repérage)
Equations de Newton-Euler avec résolution analytique puis numérique en 2D
Ouverture vers le mouvement 3D et lien avec l'approche expérimentale

(bio)mécanique du solide

Introduction

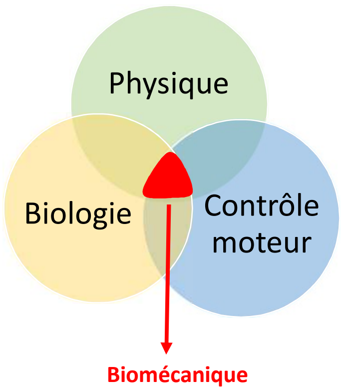
=

DIGISPORT
GRADUATE SCHOOL

Biomécanique : définition

Etude des forces et du mouvement des organismes vivants et de leurs composantes

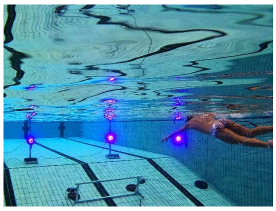
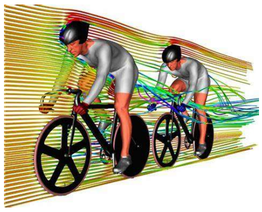
- **Biomécanique à l'échelle microscopique**
  - Protéines (e.g. collagène)
  - Filaments d'ADN
  - Cellules musculaires
- **Biomécanique à l'échelle macroscopique**
  - Tissus biologiques (os, muscles, tendon, etc)
  - Segments corporels
  - Corps complet
  - Aérodynamique & hydrodynamique

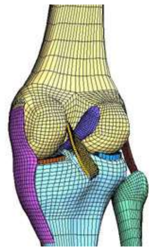


A chaque échelle correspond un type de modélisation

Biomécanique : applications principales

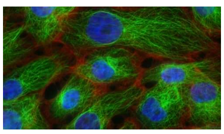
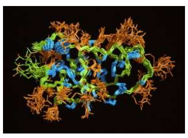
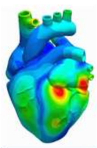
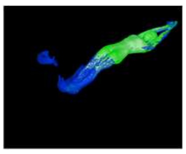
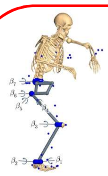
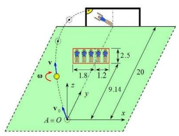
- **Biomécanique du sport**
  - Optimisation de la performance
  - Prévention des blessures et diagnostic
- **Clinique et ingénierie biomédicale**
  - Ingénierie tissulaire
  - Ingénierie et chirurgie orthopédique
  - Rééducation
  - Compréhension de pathologies
- **Ergonomie**
  - Ingénierie tissulaire
  - Ingénierie et chirurgie orthopédique



Partie intégrante des sciences du sport et de la médecine

La modélisation mécanique selon les échelles

Mécanique quantique	Mécanique moléculaire	Mécanique brownienne et réseaux	Mécanique des milieux continus	Mécanique du solide rigide	Mécanique du point
Mécanotransduction	Biologie moléculaire	Filaments	Os Tissus mous Fluides biologiques	Squelette Segments corporels	Ballon Marche Natation

Atomes — Protéines — cytosquelette — cellules — organes — Segments corporels — organismes

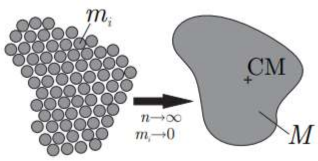
10^{-1} — 10^{-9} — 10^{-6} — 10^{-3} — 10^{-0}

Cours Modélisation Biomécanique

Les différents niveaux de modélisation mécanique

Mécanique des solides indéformables
- étude des relations forces-déplacements
- Suppose que les distances entre chaque point du solide sont constantes

Mécanique des milieux continus (MMC)
- étude des relations contraintes-déformations (comportements du matériau)
- suppose que le milieu est continu, i.e. on néglige l'aspect discret de la matière (ex : atomes)



Milieu discret	Milieu continu	Solide rigide	Point matériel
n Points matériels	$n \to \infty$	$n \to \infty$	1 seul point (ex : CM)
m_i Masses ponctuelles	$m_i \to 0$	$m_i \to 0$	Masse $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$
		Distance fixe entre les points	

Analyse de mouvement : quantités d'intérêt

→ De nombreuses **quantités accessibles à la mesure** / données externes

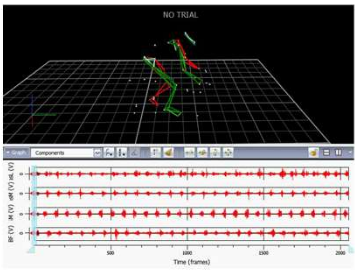
- Les choses que l'on peut mesurer :
  - Position/orientations segmentaires (e.g. Capture de mouvement) — Cinématique
  - Forces externes (e.g. plateforme de force) — Dynamique
  - Couples/moments mono- articulaires (e.g. ergomètre isocinétique)
  - Activations des muscles superficiels (e.g. EMG) — Electrique

→ D'autres **quantités fondamentales inaccessibles à la mesure** / données internes
- Angles articulaires 3D
- Efforts inter-segmentaires (Couples et forces articulaires)
- Forces musculo-tendineuses
- Activité des muscles profonds

L'analyse de mouvement nécessite l'utilisation de **modèles biomécaniques couplés à des données expérimentales**

Variables biomécaniques accessibles à la mesure

En situation d'exercice



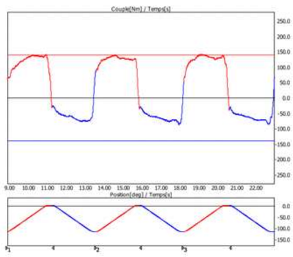
Activité électrique musculaire

Forces externes (contact)

Position de points anatomiques

Variables biomécaniques accessibles à la mesure

Hors contexte d'exercice



Poids du sportif → gravité

Couples/moments de forces articulaires → **Analyse de la résultante** de la contraction musculaire **« globale »** au niveau du système musculosquelettique ou du système ostéo-articulaire

Variables biomécaniques inaccessibles à la mesure : intérêt de la modélisation

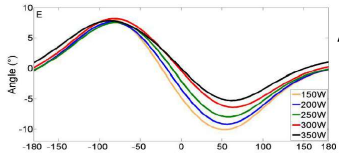
Données expérimentales

Données externes mesurables

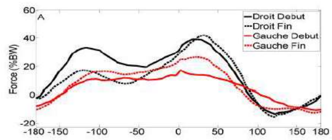
Modèle biomécanique

Modèle cinématique
Modèle musculaire
Equations du mouvement
Contraintes
Résolution numérique

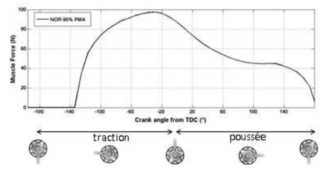
Analyses



Angles articulaires



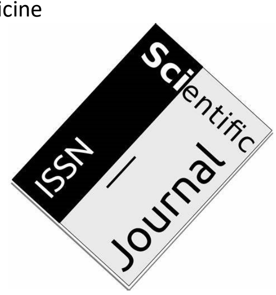
Efforts articulaires (forces/moments)



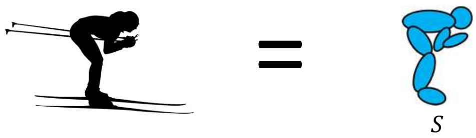
Forces musculaires

Quelques journaux d'intérêt en biomécanique du sport

Applied Ergonomics
British Journal of Sports Medicine
Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering
Ergonomics
European Journal of Sports Science
Human Movement Science
International journal of Sports Medicine
Journal of Applied Biomechanics
Journal of Biomechanical Engineering
Journal of Biomechanics
Journal of Biomedical Engineering
Journal of Medicine Science Sports & Exercise
Journal of Sports Sciences
PlosOne
Scandinavian Journal of Sports Science
Sensors
Sports Biomechanics
Sports Engineering
…



(bio)mécanique du solide



DIGISPORT GRADUATE SCHOOL

Notions essentielles pour l'analyse de mouvement

- Biomécanique
  - Cinématique
    - Translation
      - Positions Vitesses accélérations
    - Rotation
      - Angle Vitesse angulaire Accélération angulaire
    - Contraintes
  - Dynamique / Statique
    - Translation
      - Force Masse
    - Rotation
      - Moment de force Inertie
  - Energétique
    - Translation
      - Energies : cinétique potentielle
    - Rotation
      - Energies : cinétique potentielle
- Anatomie
- Anatomie fonctionnelle
- Contrôle moteur
- Physiologie

Quelques définitions de base

Cinématique : description du mouvement indépendamment des causes qui les provoquent
ex : angles articulaires, positions, vitesses, accélérations

Statique : configuration dans laquelle l'accélération est nulle

Dynamique : analyse du mouvement en lien avec les efforts qui l'on engendré

Etapes clés de la modélisation

Définir le modèle : modèle de point matériel ou modèle de solide rigide?

Définir la dimension spatiale : 2D ou 3D ?

Repérer et paramétrer

Exprimer les paramètres cinématiques : vitesse et accélération

Exprimer les paramètres dynamiques : Forces et moments de force

Exprimer les équations du mouvement : équations de Newton-Euler (translation & rotation)

Exprimer les contraintes (cinématiques)

Résoudre le problème

NB2

Quelques définitions

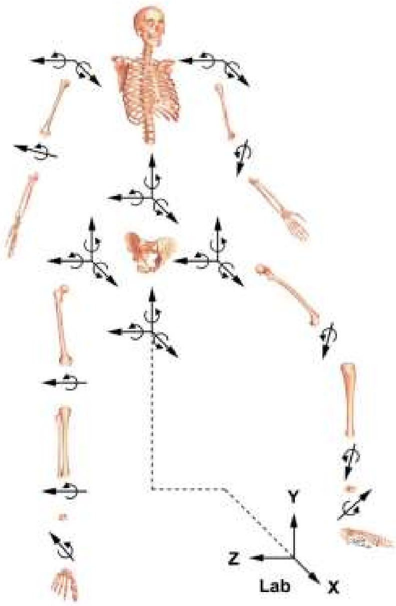
Contrainte (cinématique)

D'une manière générale, un objet peut bouger (en translation et en rotation) de manière libre dans l'espace

Dans certains cas, le mouvement peut être cinématiquement contraint : le mouvement ne peut pas avoir lieu suivant certaines directions

On parle alors de contrainte cinématique

A relier avec l'anatomie fonctionnelle



[Reinbolt et al., 2007]

2 façons d'aborder la modélisation biomécanique

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Si l'on connaît le mouvement (accélération **a**), alors on peut déterminer la force qui l'a provoqué

Dynamique inverse

$$\mathbf{a} = \frac{m}{\sum \mathbf{F}}$$

Si l'on connaît la force (**F**), alors on peut déterminer le mouvement généré

Dynamique directe

Dépend souvent du type de données expérimentales disponibles….

Diapositive 17

NB2 Nicolas Bideau; 14/09/2022

(bio)mécanique du solide

Cinématique

=

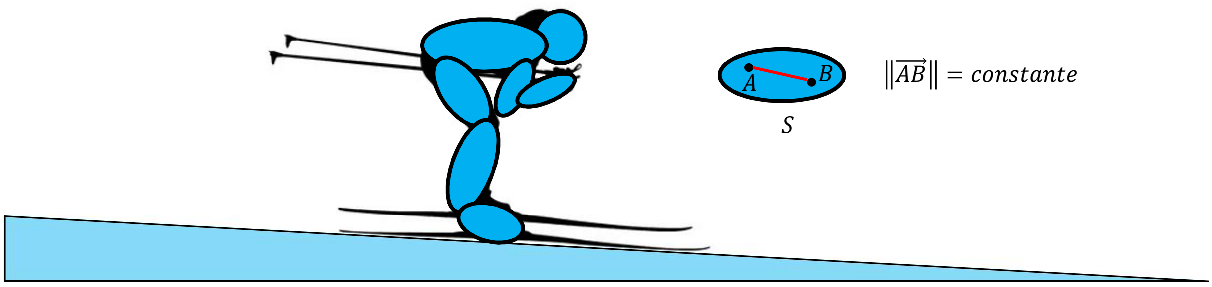
S

Choix du modèle

On considère un skieur de fond

Assimilé à un assemblage de solides rigides → chaque segment correspond à un solide rigide

Solide rigide : tout ensemble de points matériels dont la distance est invariable dans le temps



S

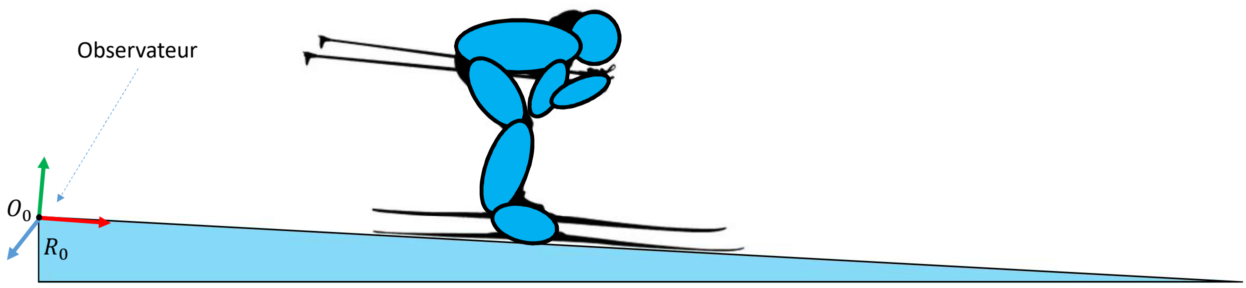
$\|\overrightarrow{AB}\| = constante$

Repérage et paramétrage

On considère un skieur de fond

- Où est il situé sur la piste ?
- Comment suivre son mouvement au cours du temps ?

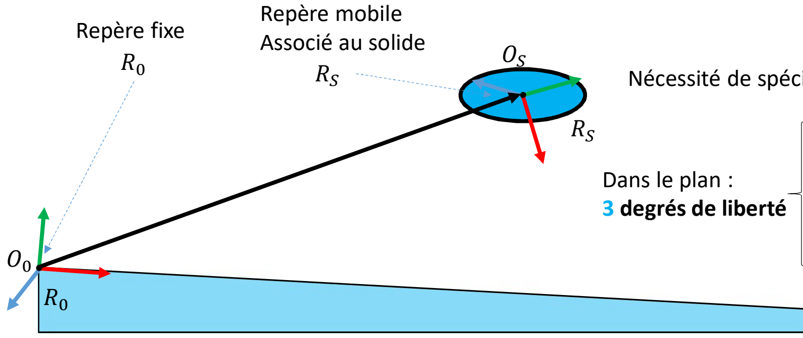
Nécessite la définition d'un repère d'espace & d'un repère de temps → Référentiel



Repérage et paramétrage

Intéressons nous au mouvement plan d'un solide unique S

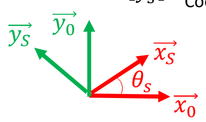
- Où est il situé sur la piste ?
- Comment suivre son mouvement au cours du temps ?



Nécessité de spécifier sa position et son orientation

Dans le plan :
3 degrés de liberté

$\overrightarrow{O_0O_S} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix}$ Coordonnée → translation + Coordonnée → translation



\+

Angle → rotation

=

2 translations
\+ 1 rotation

Repérage et paramétrage

Et la 3D dans tout ça ?

Nécessité de spécifier sa position et son orientation

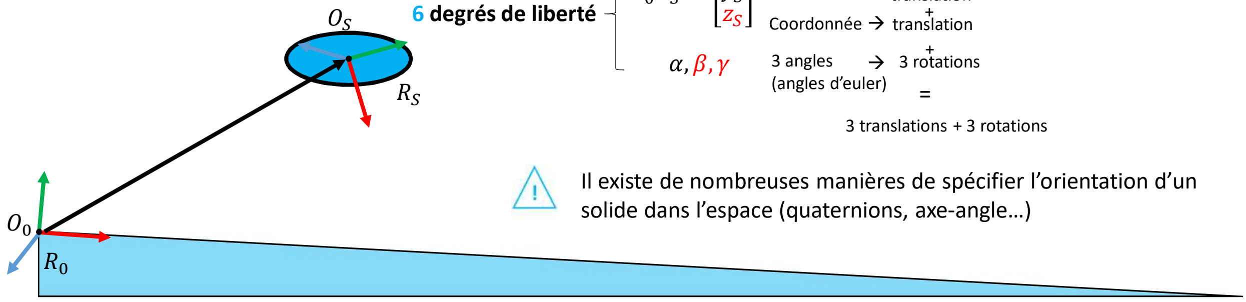
Dans l'espace :
6 degrés de liberté

$\overrightarrow{O_0 O_S} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix}$ Coordonnée → translation + Coordonnée → translation + Coordonnée → translation +

α, β, γ 3 angles (angles d'euler) → 3 rotations =

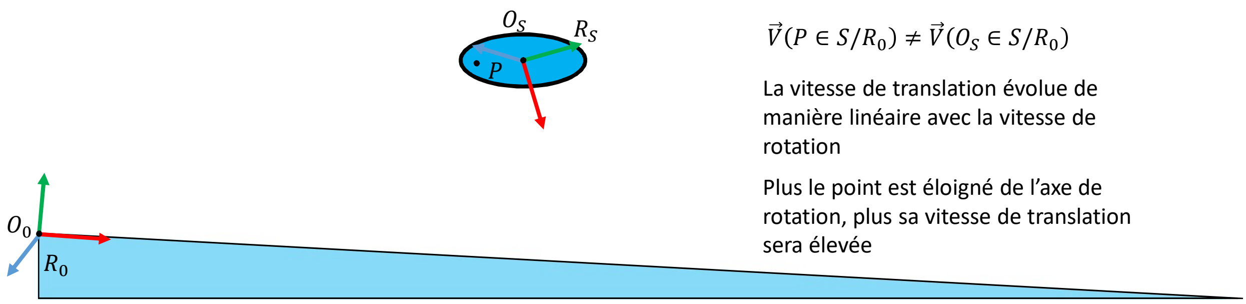
3 translations + 3 rotations

⚠ Il existe de nombreuses manières de spécifier l'orientation d'un solide dans l'espace (quaternions, axe-angle…)



Vitesse d'un point matériel quelconque du solide

La vitesse linéaire peut être différente en plusieurs points lors du mouvement



Lorsque le solide est en rotation :

$\vec{V}(P \in S/R_0) \neq \vec{V}(O_S \in S/R_0)$

La vitesse de translation évolue de manière linéaire avec la vitesse de rotation

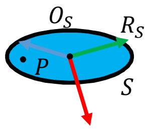
Plus le point est éloigné de l'axe de rotation, plus sa vitesse de translation sera élevée

Vitesse d'un point matériel quelconque du solide

Par définition

$$\vec{V}(P \in S/R_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{R_0} \overrightarrow{O_0P}$$

$$\vec{V}(P \in S/R_0) = \vec{V}(O_S \in S/R_0) + \overrightarrow{PO_S} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)$$



Vecteur vitesse instantanée de rotation

Le vecteur vitesse instantanée de rotation décrit la vitesse de rotation et l'axe de rotation instantanés

Dans le plan l'axe est fixe (normal au plan) : $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0$

Notion de torseur cinématique

On regroupe translation et rotation dans un unique objet mathématique

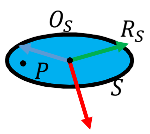
Invariant pour le solide

$$\{V(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(P \in S/R_0) \end{Bmatrix}$$

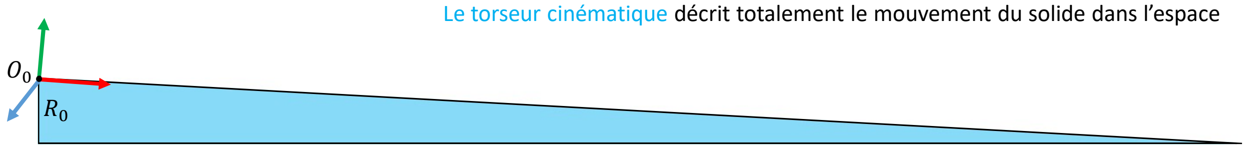
Vitesse de rotation du solide S

Vitesse linéaire du point P

Dépendant du point d'expression



Le torseur cinématique décrit totalement le mouvement du solide dans l'espace



26

L’instant BABAR

Soit un torseur T $\{T(S/R_0)\}$

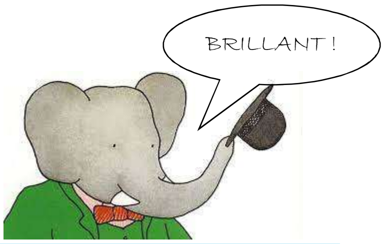
$$\{T(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(A \in S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

Expression du torseur en A

?

$$\{T(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(B \in S/R_0) \end{Bmatrix}_B$$

Expression du torseur en B

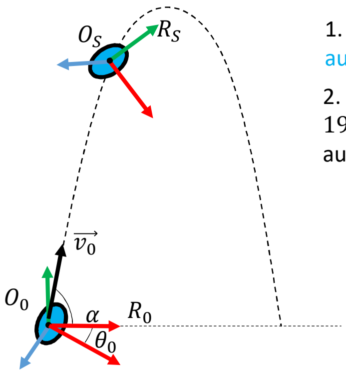


$$\boxed{\vec{M}(B \in S/R_0) = \vec{M}(A \in S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}}$$

A vous !

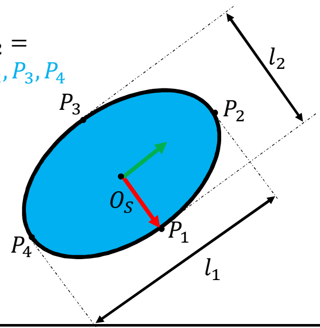
Une chandelle au rugby

Le joueur frappe le ballon S avec une vitesse $\vec{v_0} = 10\ m/s$ un angle d’incidence $\alpha = 70°$ et une orientation initiale du ballon $\theta_0 = -20°$. Il lui imprime une rotation angulaire $\dot{\theta}_0 = -720\ °/s$



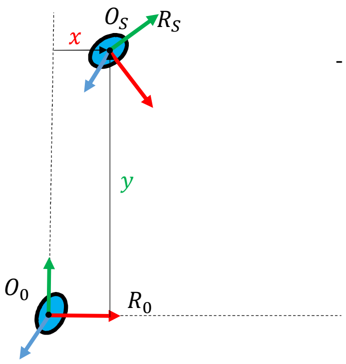
1. Déterminer à tout instant le torseur cinématique du ballon au point O_S considéré comme le centre de gravité du ballon

2. Considérant que le ballon a les dimensions $l_1 = 300mm$, $l_2 = 190mm$, déterminer la vitesse de translation des points P_1, P_2, P_3, P_4 au cours du temps.



Repérage et Paramétrage

Une origine O_S
Et une base $(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$



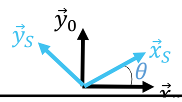
- Repérer le ballon dans ~~l'espace~~ le plan: on lui associe un **repère mobile** $R_S(O_S, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \cancel{\vec{z}_S})$

- Position du ballon dans le plan : position du centre du repère R_s

$$\underbrace{\overrightarrow{O_0O_S} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0}_{\text{Expression vectorielle}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}}_{\text{Coordonnées dans une base}}$$

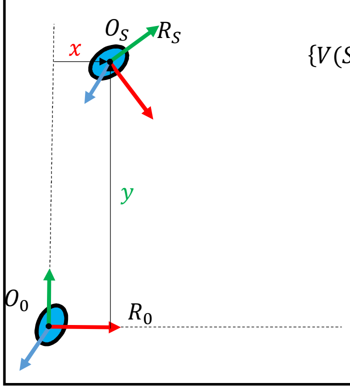
- Orientation du ballon dans le plan : rotation du repère autour de $\vec{z}_0$

⚠ Les angles sont toujours représentés positifs (ils sont algébriques)



$\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_S)$

Torseur cinématique



Vecteur vitesse instantanée de rotation

Le vecteur vitesse instantanée de rotation décrit
la vitesse de rotation et l'axe de rotation instantanés

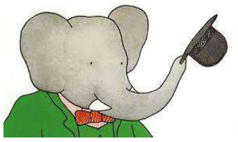
$$\{V(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(O_S \in S/R_0) \end{Bmatrix}_{O_s}$$

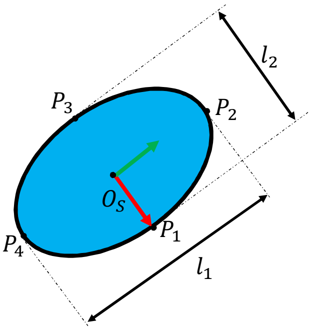
$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0$$

$$\vec{V}(O_S \in S/R_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{R_0} \overrightarrow{O_0O_S} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{R_0} (x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}$$

$$\boxed{\{V(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 \end{Bmatrix}_{O_s}}$$

Vitesse d'un point du solide





Transport de la vitesse: $\vec{V}(P \in S/R_0) = \vec{V}(O_S \in S/R_0) + \overrightarrow{PO_S} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)$

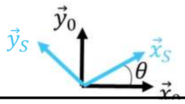
Point P_1 $\overrightarrow{O_S P_1} = \frac{l_2}{2}\vec{x}_S$

$$\vec{V}(P_1 \in S/R_0) = \vec{V}(O_S \in S/R_0) + \overrightarrow{P_1 O_S} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$\vec{V}(P_1 \in S/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - \frac{l_2}{2}\vec{x}_S \wedge \dot{\theta}\vec{z}_0$$

$$\vec{V}(P_1 \in S/R_0) = \underbrace{\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \frac{l_2}{2}\dot{\theta}\vec{y}_S}_{\text{Expression vectorielle}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} - \frac{l_2}{2}\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} + \frac{l_2}{2}\dot{\theta}\cos\theta \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}}_{\text{Coordonnées dans une base}}$$

$$\{V(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 \end{Bmatrix}_{O_S}$$



Nécessité de projeter les vecteurs dans la base d'expression !

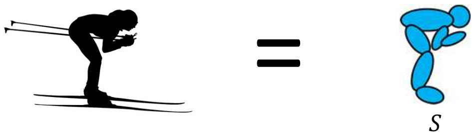
Et maintenant ?

Contrairement à la mécanique du point dans le plan, on a 3 paramètres pour décrire le mouvement (la trajectoire) du ballon au cours du temps x, y, θ

Besoin d'exprimer l'équilibre dynamique en rotation

(bio)mécanique du solide

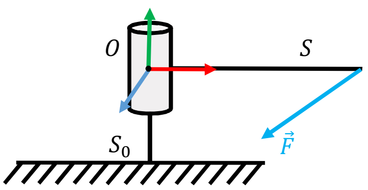
Dynamique



Notion de moment (de force)

Effet d'une force autour d'un axe

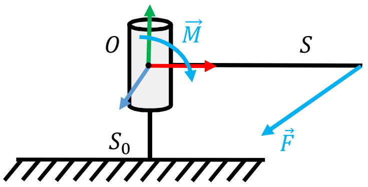
= la tendance qu'a une force à engendrer une rotation sur un solide



Action mécanique $\vec{F}(ext \rightarrow S)$ agissant sur un solide S en un point M. Le corps tourne par rapport à S_0 autour de l'axe $\vec{y}_0$

Notion de moment

- Exprimée sous forme vectorielle
  - direction
  - sens
  - norme = intensité
  - point d’application
  - additif
  - ce vecteur a des coordonnées !

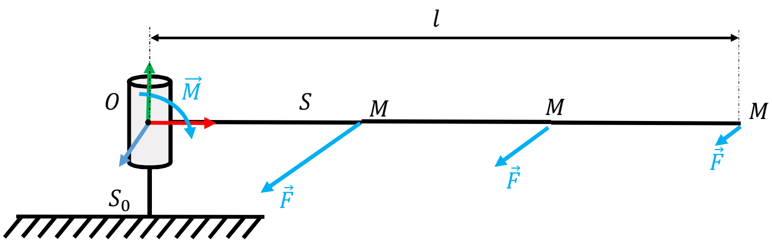


- Exprimée en Newton $N.m$

Notion de levier

Pour un même moment, c’est la force appliquée le plus loin possible de l’axe de rotation qui est la plus faible (et donc la plus économique) ⇨ bras de levier

Le levier amplifie (ou réduit) l'effort proportionnellement au rapport des **bras de levier**, c'est-à-dire à la distance du pivot au point d'application de l'effort

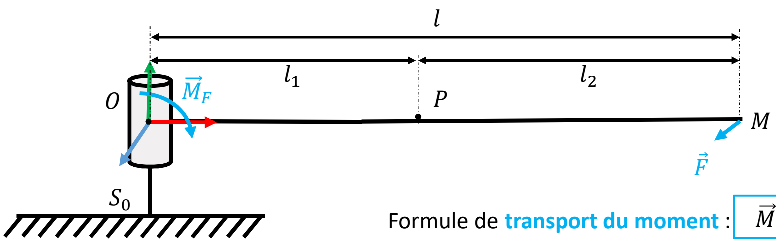


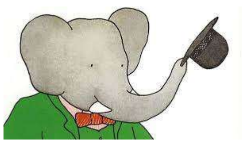
Calcul du moment d'une force

$\boxed{\vec{M}(O, F \rightarrow S/\ R_0) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}$

Si l'on calcule le moment en un point P quelconque: $\vec{M}(P, F \rightarrow S/\ R_0) = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{F}$

On constate: $\vec{M}(O, F \rightarrow S/\ R_0) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{PM} \wedge \vec{F}$





Formule de **transport du moment** : $\boxed{\vec{M}(O, F \rightarrow S/\ R_0) = \vec{M}(P, F \rightarrow S/\ R_0) + \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}}$

37

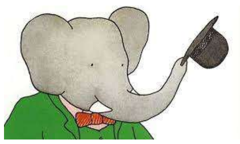
Notion de torseur d'action mécanique

On regroupe force et moment dans un unique objet mathématique

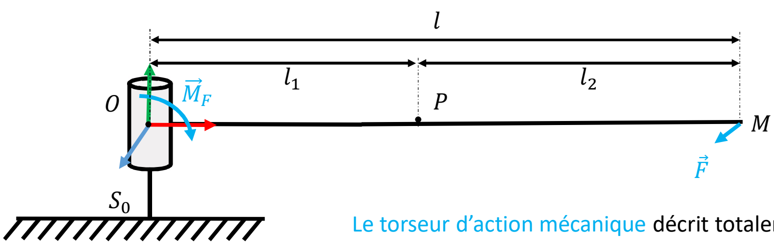
$$\boxed{\{F(ext \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}(ext \rightarrow S/R_0) \\ \vec{M}(P, F \rightarrow S/R_0) \end{Bmatrix}_P}$$

Invariant pour le solide

Dépendant du point d'expression



$\boxed{\vec{M}(B, F \rightarrow S/\ R_0) = \vec{M}(A, F \rightarrow S/\ R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}}$

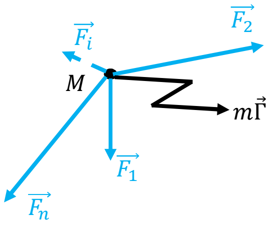


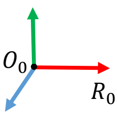
Le torseur d'action mécanique décrit totalement l'action mécanique sur le solide

38

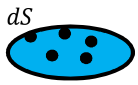
Principe fondamental de la dynamique

On va vu, pour un point matériel $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m\vec{\Gamma}(M/R_0)}$





Considérons à présent un solide composé d'une infinité de particules élémentaires dS:



L'équilibre d'une particule dS située en un point M quelconque du solide peut alors s'écrire:

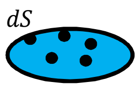
$$\boxed{d\vec{f}(ext \rightarrow dS) = dm.\vec{\Gamma}(M \in S/R_0)}$$

Efforts extérieurs appliqués à dS

Masse de la particule dS

Accélération de la particule (située en M)

Principe fondamental de la dynamique



$$\boxed{d\vec{f}(ext \rightarrow dS) = dm.\vec{\Gamma}(M \in S/R_0)}$$

L'équilibre du solide S est possible si cette expression est vraie pour la somme de toutes les particules
On intègre cette expression sur l'ensemble des solides et on calcule le moment des efforts en un point donné

Théorème de la résultante dynamique $\boxed{\sum_S \vec{F}(ext \rightarrow S/R_0) = m\vec{\Gamma}(G \in S/R_0)}$

Accélération du centre de masse

Somme des actions extérieures s'appliquant sur S

Masse du solide (invariant)

Théorème du moment dynamique $\boxed{\sum_S \vec{M}(P, ext \rightarrow S) = \vec{\delta}(P, S/R_0)}$

Somme des moments d'actions mécaniques extérieures s'appliquant sur S exprimées au point P

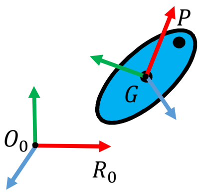
Moment dynamique du solide S exprimé au point P

Moment dynamique ?

Il s'agit des quantités d'accélération angulaire

Il s'exprime à partir du moment cinétique (qui est la quantité de mouvement angulaire)

Moment cinétique



Pour un solide S de centre de masse G et de torseur cinématique $\{V(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(P \in S/R_0) \end{Bmatrix}_P$

Le moment cinétique s'exprime alors

$$\boxed{\vec{\sigma}(P,S/R_0) = \bar{\bar{I}}(P,S)\vec{\Omega}(S/R_0) + m\overrightarrow{PG} \wedge \vec{V}(P \in S/R_0)}$$

Matrice d'inertie du solide exprimée au point P

⚠ Si P est fixe dans R_0 alors $\vec{V}(P \in S/R_0) = \vec{0}$

⚠ Si $P = G$ alors $\overrightarrow{PG} = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{\sigma}(P,S/R_0) = \bar{\bar{I}}(P,S)\vec{\Omega}(S/R_0)}$$

Comment calculer la matrice d'inertie ?

Notion de masse et d'inertie

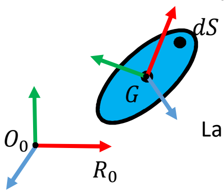
Inertie : Propriété qu'a un corps à s'opposer à toute modification de son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme = Résistance à la modification du mouvement.

->reliée à la quantité de matière dont le corps est formé et sa répartition autour du centre de masse

Masse : mesure quantitative de l'inertie (masse inertielle)

Plus un corps a de la masse, plus il est difficile de le mettre en mouvement ou de modifier sa trajectoire

Masse, matrice d'inertie, centre de masse



Soit une particule dS de masse $dm = \rho(M)dV$

Masse volumique

Volume de dS

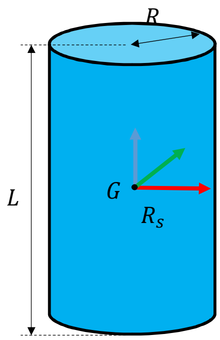
La masse du solide est donnée par $\boxed{m = \iiint_S dm}$

La centre de gravité du solide est donné par $\boxed{\overrightarrow{O_0G} = \frac{1}{m}\iiint_S \overrightarrow{O_0M}dm}$

La matrice d'inertie du solide est donnée par

$$\bar{\bar{I}}(P,S) = \begin{bmatrix} \iiint_S (y^2+z^2)dm & -\iiint_S xydm & -\iiint_S xzdm \\ -\iiint_S xydm & \iiint_S (x^2+z^2)dm & -\iiint_S yzdm \\ -\iiint_S xzdm & -\iiint_S yzdm & \iiint_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}_{R_S}$$

Matrice d'inertie, en pratique



$$\bar{\bar{I}}(P,S) = \begin{bmatrix} \iiint_S (y^2+z^2)dm & -\iiint_S xydm & -\iiint_S xzdm \\ -\iiint_S xydm & \iiint_S (x^2+z^2)dm & -\iiint_S yzdm \\ -\iiint_S xzdm & -\iiint_S yzdm & \iiint_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}_{R_S}$$

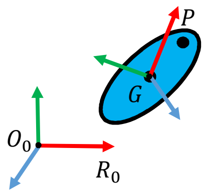
⚠

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int_a^b \cos 2x \, dx = \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_a^b$$

Et le moment dynamique dans tout ça ?



Pour un solide S de centre de masse G et de moment cinétique $\vec{\sigma}(P,S/R_0)$

Le moment dynamique s'exprime alors

$$\boxed{\vec{\delta}(P,S/R_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{R_0} \vec{\sigma}(P,S/R_0) + m\vec{V}(P/R_0)\wedge\vec{V}(G\in S/R_0)}$$

⚠ Si P est fixe dans R_0 alors $\vec{V}(P/R_0) = \vec{0}$

⚠ Si $P =$ G alors $\vec{V}(P/R_0)\wedge\vec{V}(G\in S/R_0)$

$$\boxed{\vec{\delta}(P,S/R_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{R_0} \vec{\sigma}(P,S/R_0)}$$

Torseur cinétique, torseur dynamique

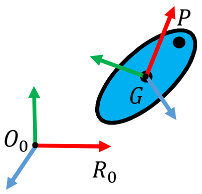
On peut regrouper les quantités de mouvement dans un torseur, le torseur cinétique

$$\{C(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} m\vec{V}(G \in S/R_0) \\ \vec{\sigma}(P \in S/R_0) \end{Bmatrix}_P$$

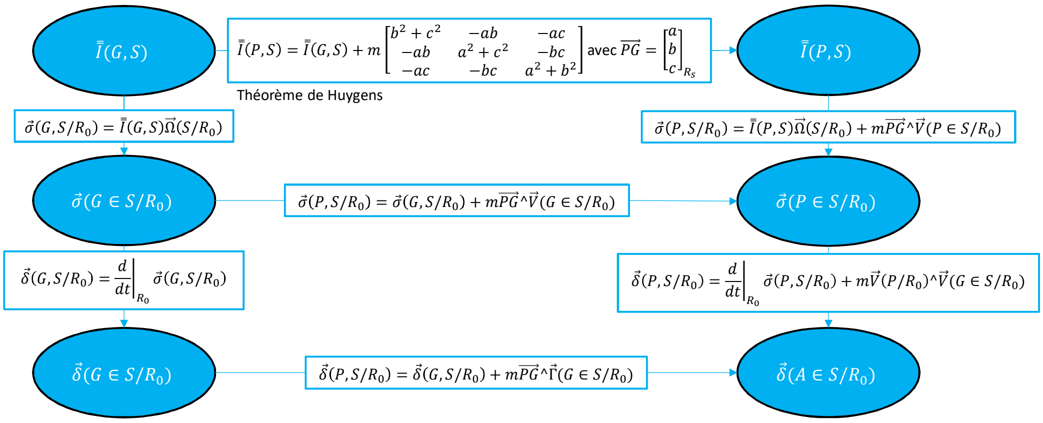
On peut regrouper les quantités d'accélération dans un torseur, le torseur dynamique

$$\{D(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G \in S/R_0) \\ \vec{\delta}(P \in S/R_0) \end{Bmatrix}_P$$

Calcul du torseur dynamique



⚠ On suppose connu le torseur cinématique de S $\{V(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(P \in S/R_0) \end{Bmatrix}_P$



Principe fondamental de la dynamique

Pour un solide S isolé, le torseur dynamique est égal au torseur des actions mécaniques extérieures

$$\{D(S/R_0)\} = \{F(ext \rightarrow S)\}$$

$$\{D(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G \in S/R_0) \\ \vec{\delta}(P \in S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

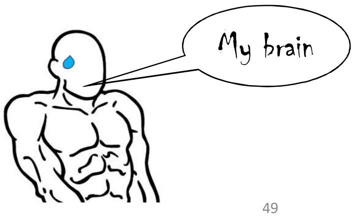
$$\{F(ext \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \sum_S \vec{F}(ext \rightarrow S/R_0) \\ \sum_S \vec{M}(P, F \rightarrow S/R_0) \end{Bmatrix}_P$$

Les simplifications de calcul au centre de masse et en un point fixe conduisent à utiliser ces points en PRIORITE lors des calculs

6 équations du mouvement

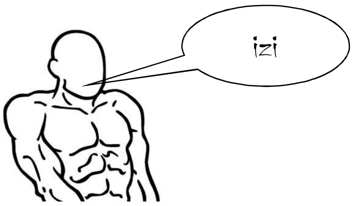
Au centre de masse -> théorème du moment cinétique

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{R_0} \vec{\sigma}(G, S/R_0) = \sum_S \vec{M}(G, F \rightarrow S/R_0)$$



49

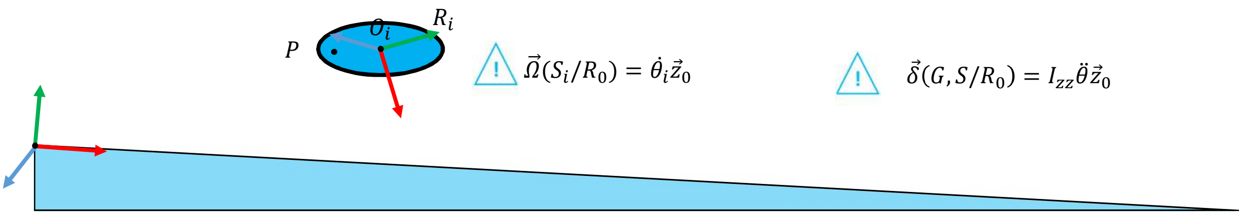
Problème plan



3 ddl (2 translations, une rotation) = 3 équations du mouvement

Toutes les rotations sont normales au plan

Seule l'inertie normale au plan est utile ($\vec{z}_0$ axe principal d'inertie



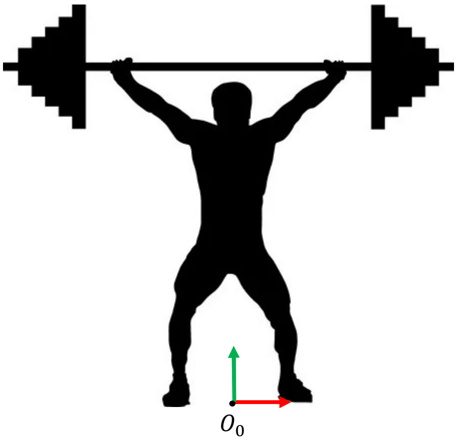
$\vec{\Omega}(S_i/R_0) = \dot{\theta}_i \vec{z}_0$

$\vec{\delta}(G, S/R_0) = I_{zz} \ddot{\theta} \vec{z}_0$

50

A vous !

Prenons ce modeste haltérophile



On va considérer qu'il tient fermement son haltère, et qu'il forme donc avec lui un unique solide S.

$\boxed{\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \{0\}}$ Il ne bouge pas !

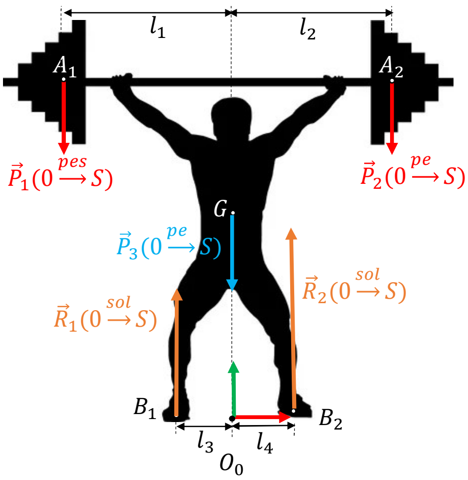
Principe fondamental de la ~~dynamique~~ statique

En considérant la masse de l'athlète m_1, la masse de l'haltère m_2 et les réactions au sol $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$, on peut poser le problème de la manière suivante

51

A vous !

Prenons ce modeste altérophile



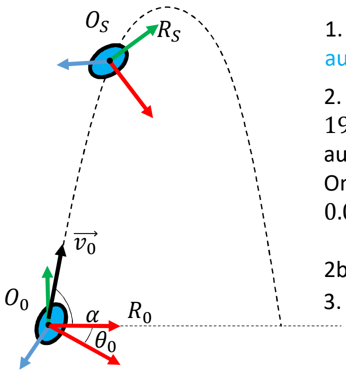
1. Bilan des actions mécaniques extérieures
2. PFS
3. Obtention de R_1 et R_2

52

A vous !

Une chandelle au rugby

Le joueur frappe le ballon S avec une vitesse $\vec{v_0} = 10\ m/s$ un angle d'incidence $\alpha = 70°$ et une orientation initiale du ballon $\theta_0 = -20°$. Il lui imprime une rotation angulaire $\dot{\theta_0} = -720\ °/s$

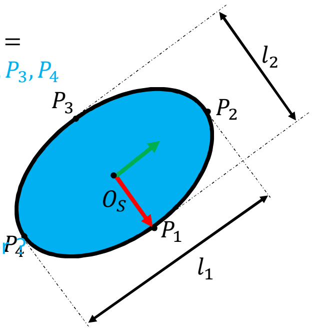


1. Déterminer à tout instant le torseur cinématique du ballon au point O_S considéré comme le centre de gravité du ballon

2. Considérant que le ballon a les dimensions $l_1 = 300mm$, $l_2 = 190mm$, déterminer la vitesse de translation des points P_1, P_2, P_3, P_4 au cours du temps.
On lui attribue une masse $m = 450g$ et une inertie $I_{zz} = 0.0135 kg.m^2$

2bis. Ecrire le PFD pour le ballon

3. Parmi les 4 points étudiés, lequel va toucher le sol en premier ?



Ce que l'on a pas vu aujourd'hui

Frottement

Système de solides

Energétique

Impulsion

Liaisons mécaniques

Forces musculaires

Application : maintien d'une haltère

On considère un sportif effectuant un mouvement de flexion (mouvement plan) du coude en tenant une haltère de masse $m = 10\ kg$ dans la main.

Les points E, C et H représentent respectivement le centre articulaire de l'épaule, le centre articulaire du coude et le centre de masse de la main.

L'origine du repère est située au niveau du point C auquel est attaché un repère orthonormé (x,yz)

Lors de la flexion du coude, deux muscles sont principalement impliqués : le brachial antérieur et le biceps brachial qui s'insèrent respectivement au niveau des points I1 et I2 avec un angle α et β égaux à $\pi/_3\, rad$

Dans une première partie, on suppose que le sujet maintient une posture statique pour laquelle l'angle de flexion du coude est égal à $\theta_0 = \pi/_2\, rad$

On considère les données suivantes :

- Distance coude-insertion du brachial antérieur : 4 cm
- Distance coude-insertion du biceps brachial : 6 cm
- Masse de l'avant-bras+main : 1.6% de la masse totale du sujet
- Distance coude-centre de gravité du système avant-bras-main :43% de la longueur avant-bras+main