Mathématiques pour la modélisation statistique

Séries numériques et Intégrales

Myriam Vimond (ENSAI)
Master Sciences du Numérique et du Sport

Update: 8 juillet 2022

Table des matières

1 Généralités sur les séries numériques

Suites numériques. Une suite est une liste ordonnée de nombres réels, $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, numérotés par les entiers naturels.

Définition 1

Une **suite numérique** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout entier n associe un réel noté u_n. La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).

Example 1.1 *Des exemples de suites numériques :*

- *Quand un mobile qui se déplace sur une droite, on note u_n sa position à chaque seconde n.*
- $u_n = \frac{n+5}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$

Généralement l'étude des suite consiste examiner les valeurs prises par la suite lorsque n est très grand. On distingue trois comportements :

- La suite est **convergente.** Au fur et à mesure que l'entier n devient grand, les termes u_n deviennent aussi proche que l'on veut d'un nombre ℓ. On dit que ℓ est la **limite** de la suite et on note,
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$
- La suite admet une limite et est **divergente.** Au fur et à mesure que l'entier n devient grand, les termes u_n deviennent de plus en plus grand. On note,
$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \text{ ou } \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$
- La suite n'admet pas de limite et est **divergente.** Au fur et à mesure que l'entier n devient grand, la suite u_n ne se stabilise autour d'aucune valeur.

Lorsqu', on parle de suite convergente.

Example 1.2 *Des exemples de suites numériques :*

- $u_n = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
  La suite (u_n) admet une limite et est divergente, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- $u_n = \frac{n+5}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$. *La suite (u_n) est convergente,* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1/2$.

- $u_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$. *La suite* (u_n) *est convergente,* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
- $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. *La suite* (u_n) *n'admet pas de limite et est divergente.* (u_n) *oscille entre deux valeurs* 1 *ou* -1, *mais elle ne se stabilise pas autour d'une seule valeur pour n assez grand.*

Séries numériques. Soit (u_n) une suite de nombre réels. On définit la somme partielle de la suite,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_n = u_1 + \ldots + u_n, \qquad n \geq 0$$

Le but est d'étudier l'existence d'une limite pour cette suite (S_n), qu'on appelle la **série de terme général** u_n. Une condition nécessaire pour que la série converge est que la suite (u_n) converge vers 0.

Définition 2

La série de terme général u_n est **convergente** si la suite (S_n) est convergente vers une limite notée

$$\sum_{n\geq 0} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

1: Séries de référence utilisée en statistique

- **Série géométrique** de terme général $u_n = p^n q$, où $p \in]-1, 1[$ et $q \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geq 0} p^n q = \frac{q}{1-p}$$

- **Série de Riemann** de terme général $u_n = 1/n^\alpha$, où $\alpha > 1$,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{converge.}$$

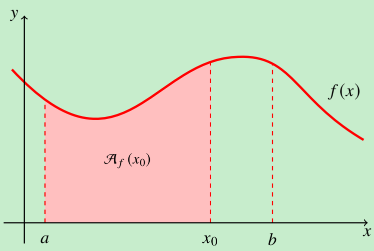
  En particulier la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.
- **Série exponentielle** de terme général $u_n = x^n/(n!)$, où $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

2 Intégrale d'une fonction d'une variable

Dans cette section, on considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Aire sous la courbe. Dans un premier temps, on suppose que f est une fonction continue et positive. Pour tout $x_0 \in [a, b]$, on note $\mathcal{A}_f(x_0)$ l'aire sous la courbe en rose. On note que $A_f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction positive et croissante. Qui plus est on peut montrer que $\mathcal{A}_f$ est dérivable,



$$\mathcal{A}'_f(x) = f(x), \qquad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

$\mathcal{A}_f$ est donc une primitive de la fonction f. Par la suite, on note,

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}_f(b) \qquad \text{(aire sous la courbe sur le segment [a,b]).}$$

Intégration sur un segment. La notion de primitive permet alors de définir de façon rigoureuse celle d'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Définition 3: Intégrale sur un segment

Soit f une fonction continue d'une variable réelle définie sur l'intervalle $I = [a, b]$. Soit F une primitive de d sur I. L'**intégrale de f de a à b,** notée $\int_a^b f(x)dx$, est le nombre,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notons que la lettre x de la définition, ou **variable d'intégration**, est muette :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

Exercice 1

Montrez les égalités suivantes,

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-3x+4)dx=\frac{26}{3}$
2. $\displaystyle\int_{1}^{\exp(1)}\frac{1}{x}dx=1$
3. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{2}{2t-1}dt=\log\left(\frac{3}{5}\right)$
4. $\displaystyle\int_{1}^{3}\log(u)du=3\log(3)-2$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\exp(2x)dx=\frac{\exp(4)-\exp(2)}{2}$

2: Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonction continues sur $I=[a,b]$, $c\in]a,b[$ et λ et μ deux réels quelconques.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)+\mu g(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$ (Linéarité de l'intégrale)
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geq 0,$ si f est positive sur I, (Positivité de l'intégrale)
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx,$ si $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in I$, (Croissance)

Ainsi la fonction $F:x\to\int_a^x f(u)du$ est la primitive de f telle que $F(a)=0$.

Intégration sur la droite réelle. Nous avons présenté l'intégrale définie sur un segment fermé. Or il existe des applications, notamment en statistique inférentielle, faisant intervenir des intégrales sur des intervalles du type $I=]-\infty,\infty[$ ou $I=[0,\infty[$, comme par exemple

$$\int_0^\infty \exp(-x)dx,\qquad \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2/2)dx.$$

On parlera d'**intégrale généralisée**.

Définition 4: Intégrale sur $I = [0, \infty[$

Soit f une fonction continue sur $I = [0, \infty[$. On dit que f est intégrale sur $[0, \infty[$ si la limite

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x)dx$$

existe et est finie. On note alors $\int_0^\infty f(x)dx$ cette limite.

Définition 5: Intégrale sur $I =]-\infty, \infty[$

Soit f une fonction continue sur $I =]-\infty, \infty[$. On dit que f est intégrale sur $]-\infty, \infty[$ si elle est intégrable sur $[0, \infty[$ et $]-\infty, 0]$. On note,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

3: Intégrales de référence

- $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-x)dx = 1$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi}$
- $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^\infty x^{a-1}\exp(-x)dx$ pour $a > 0$. La fonction Γ possède les propriétés suivantes, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ et $\Gamma(n) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Intégrale d'une fonction à plusieurs variables

Ce qu'on sait faire pour les fonctions d'une variable s'étend dans une certaine mesure aux fonctions de plusieurs variables.

Définition 6

Une **fonction numérique** f à deux variables réelles est un procédé associant à chaque couple (x, y) appartenant à une certaine partie D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un nombre réel noté $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f \;:\; D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow f(x, y) \end{aligned}$$

Certaines fonctions sont définies pour toutes les valeurs des (deux) variables mais d'autres non. L'ensemble de définition D_f est le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ pour lequel f est bien définie.

Exemple

- *La fonction* $f : (x, y) \rightarrow x + y$ *est définie sur* $D_f = \mathbb{R}^2$.
- *La fonction* $g : (x, y) \rightarrow xy$ *est définie sur* $D_g = \mathbb{R}^2$.
- *La fonction* $h : (x, y) \rightarrow x/y$ *est définie sur* $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Dérivée partielle d'une fonction à deux variables. Pour une fonction de deux variables, il y a deux dérivées, une *par rapport à* x et l'autre *par rapport à* y.

Définition 7

La **dérivée partielle en** (x_0, y_0) **par rapport à la première variable** x est la dérivée en x_0 de la fonction à une variable,

$$x \rightarrow f(x, y_0) \qquad (x \text{ varie, et } y = y_0 \text{ est fixé}).$$

La **dérivée partielle en** (x_0, y_0) **par rapport à la deuxième variable** y est la dérivée en y_0 de la fonction à une variable,

$$y \rightarrow f(x_0, y) \qquad (y_0 \text{ varie, et } x = x_0 \text{ est fixé}).$$

On utilise les notations suivantes,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \quad \text{dérivée partielle en } (x_0, y_0) \text{ par rapport à } x,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0), \quad \text{dérivée partielle en } (x_0, y_0) \text{ par rapport à } y.$$

Exemple

- *Pour* $f : (x, y) \to x + y$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 1$ *et* $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 1$
- *Pour* $g : (x, y) \to xy$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = y_0$ *et* $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = x_0$
- *Pour* $h : (x, y) \to x/y$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 1/y_0$ *et* $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = -x_0/y_0^2$.

Intégrale d'une fonction à deux variables. Pour intégrer une fonction de deux variables, on fait de même on inttègre d'abbord par rapport à la première variable, puis par la seconde variable.

Définition 8

Soient $a < b$ et $c < d$ des réels. Soit $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$. L'intégrale de f sur $[a, b] \times [c, d]$ est définie par,

$$\int_a^b \overbrace{\left\{ \int_c^d \underbrace{f(x, y) dy}_{(1)} \right\} dx}^{(2)},$$

où (1) on fixe d'abord la variable muette x et on intègre la fonction $y \to f(x, y)$ sur $[c, d]$, puis (2) on intègre la fonction $x \to \int_c^d f(x, y) dy$ sur $[a, b]$.

Exemple *On intègre la fonction* g *sur* $[0, 1] \times [1, 2]$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_1^2 (xy) dy dx &= \int_a^b \left\{ \int_c^d \underbrace{xy dy}_{(1)} \right\} dx, && \text{((1) } x \text{ est fixé)} \\
&= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} x(2^2) - \frac{1}{2} x(1^2) \right\} dx, && \text{(une primitive de } y \to xy \text{ est } y \to xy^2/2) \\
&= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} x \right\} dx, \\
&= 1
\end{aligned}$$