Mathématiques pour la modélisation statistique

Les fonctions

Myriam Vimond (ENSAI)
Master Sciences du Numérique et du Sport

Update: 6 juillet 2022

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

Les fonctions permettent d'exprimer et de comprendre les relations qui existent entre les variables.

Définition 1

Une **fonction numérique** f d'une variable réelle est un procédé associant à chaque réel x appartenant à une certaine partie D de $\mathbb{R}$ un nombre réel noté $f(x)$:

$$\begin{aligned} f\ :\ D \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f.
L'ensemble D_f des réels x qui possède une image par f est appelé **ensemble de définition** de f.

En général, une fonction est définie par une formule donnant l'expression du nombre image $f(x)$ en fonction de x. On s'intéresse à l'étude des variations de f sur le domaine $D \subset D_f$. Il est toujours recommandé de déterminer le domaine de définition d'une fonction avant de travailler avec.

Exemple

- *Soit f la fonction définie $]0,1[$ par $f(x) = x(1-x)$. La fonction est définie sur $D_f = \mathbb{R}$, mais notre intérêt porte uniquement sur les variations de f sur $D =]0,1[$.*
- *Soit $g : x \longrightarrow \frac{3x+7}{x(x^2+4)}$. La fonction est définie pour tout x tel que $x(x^2+4) \neq 0$, c'est à dire $D_g = \mathbb{R}^*$.*
- *Soit $h : x \longrightarrow \sqrt{x(x+3)}$. La fonction est définie pour tout x tel que $x(x+3) \geq 0$, c'est à dire $D_g =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$.*

Définition 2

Si a et b sont deux réels tels que $b = f(a)$, on dit que a est l'**antécédent** de b par f.

- a est l'**antécédent** de b par f ;
- b est l'**image** de a par f.

Définition 3

L'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, où x décrit le domaine de définition D_f, s'appelle **graphe** ou **courbe représentative** de f.

1: Opérations entre fonctions numériques

Soient f et g deux fonction définies sur $D \subset \mathbb{R}$. On définit,

$$\begin{aligned} \text{leur somme} \quad f+g : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x)+g(x) \\ \text{leur produit} \quad f\times g : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x)g(x) \end{aligned}$$

$$\text{leur quotient} \quad f/g : x \longrightarrow f(x)/g(x) \quad \text{pour } x \in D \ : g(x) \neq 0$$

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonction définies telles que pour tout $x \in D$, $f(x) \in E$. On définit,

$$\begin{aligned} \text{leur composition} \quad g\circ f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g\left(f(x)\right). \end{aligned}$$

Exemple (suite)

- *La fonction f est le produit de deux fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow 1-x$.*
- *La fonction g est le quotient de deux fonctions $x \rightarrow 3x+7$ et $x \rightarrow x(x^2+4)$.*
- *La fonction h est la composée de deux fonctions $x \rightarrow \sqrt{x}$ et $x \rightarrow x(3+x)$.*

2 Sens de variation

Étudier le sens de variation d'une fonction sur son domaine de définition consiste, entre autre, à trouver les intervalles où elle est croissante ou décroissante.

Définition 4: Monotonie

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur l'intervalle I.

- f est **croissante** sur I lorsque pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$x \leq y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq f(y)$$
- f est **décroissante** sur I lorsque pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$x \leq y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \geq f(y)$$
- f est monotone sur I si elle garde le même sens de variation sur tout I.

On peut traduire les variations d'une fonction par un tableau de variations

Exemple *La fonction* $\ell : x \longrightarrow x^2$ *est décroissante sur* $]-\infty, 0]$ *et croissante sur* $[0, +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\ell(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Définition 5: Minimum et Maximum

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur l'intervalle I et soit $x_0 \in I$.

- f admet un **maximum** en x_0 si
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \leq f(x_0)$$
- f admet un **minimum** en x_0 si
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geq f(x_0)$$
- f admet un **maximum local** en x_0 lorsqu'il existe un intervalle $[a, x_0]$ sur lequel f est croissante et un intervalle $[x_0, b]$ sur lequel f est décroissante.
- f admet un **minimum local** en x_0 lorsqu'il existe un intervalle $[a, x_0]$ sur lequel f est décroissante et un intervalle $[x_0, b]$ sur lequel f est croissante.

Exemple *La fonction* $\ell : x \to x^2$ *admet un minimum en* $x_0 = 0$.

Soit $p : x \to p(x)$ *la fonction dont le tableau de variation sur* $I = [-5, 5]$ *est,*

x	-5	-3	-2	-1	2	5
$p(x)$	2	-4	0	-3	4	-1

Les minima locaux de p *sont* $\{-3, -1\}\}$. p *admet un minimum en* $x_0 = -3$ *sur* I.

Les maxima locaux de p *sont* $\{-2, 2\}\}$. p *admet un maximum en* $x_0 = 2$ *sur* I.

3 Continuité, dérivées et primitives d'une fonction

La continuité d'une fonction. La continuité d'une fonction f sur un intervalle I peut se traduire par le fait que l'on peut tracer le graphe de f sans lever le crayon sur l'intervalle. La vraie définition est en fait basée sur la notion de limite d'une fonction.

Définition 6: Continuité

La fonction f est **continue en** x_0 lorsqu'elle admet une limite en x_0 et que cette limite est simplement la valeur $f(x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La fonction f est **continue sur un intervalle** I si elle est continue en tout point de l'intervalle.

La somme, le produit et le quotient (à condition que le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sont des fonctions continues. Si f et g sont des fonctions continues, la fonction composée $f \circ g$ est continue.

La dérivée première d'une fonction. La notion de dérivée est difficile à introduire de façon rigoureuse sans la notion de limite. On se ramène à une interprétation géométrique en l'associant à la définition d'une tangente à la courbe de f.

Définition 7: Dérivée première

La fonction f est **dérivable en** x_0 lorsque la limite suivante existe,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Le nombre $f'(x_0)$ est la **dérivée de** f **en** x_0.
La fonction f est **dérivable sur un intervalle** $I =]a, b[$ si elle est dérivable en tout point de l'intervalle. On peut alors définir la **fonction dérivée**, notée f', sur I.

En d'autres termes, f est dérivable en x_0 si la courbe de f admet une **tangente** d'équation,

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

2: Opérations sur les dérivées

Soient f et g deux fonction dérivables sur I,

$$\text{(la somme)} \quad (f+g)'(x) = (f)'(x) + (g)'(x), \quad x \in I$$

$$\text{(le produit)} \quad (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad x \in I$$

$$\text{(le quotient)} \quad (f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{pour } x \in I \ : g(x) \neq 0$$

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonction dérivables sur I et J respectivement telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. On définit,

$$\text{(la composition)} \quad (g \circ f)'(x) = f'(x)g'\left(f(x)\right), \quad x \in I.$$

Théorème 1: Dérivée et variations

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$, alors :

- f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive sur I ;
- f est décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative sur I ;
- f admet un minima ou un maxima local en $x_0 \in I$ si $f'(x_0) = 0$. On dit que x_0 est un **point critique** de f.

La dérivée seconde d'une fonction. Si la dérivée première f' est continue, cela signifie que localement, on peut approcher f par une fonction affine autour de x_0,

$$\text{Pour } h \text{ très proche de } 0, \quad f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0),$$

où $\simeq$ signifie que les deux quantités sont proches mais pas tout à fait égales. Cette approximation permet de déterminer les variations locales de f au voisinage de x_0 :

- si $f'(x_0) > 0$, f est croissante autour de x_0 ;
- si $f'(x_0) < 0$, f est décroissante autour de x_0.

Maintenant si $f'(x_0) = 0$, alors f' est soit un minimum local ou un maximum local. Pour déterminer si ce point x_0 est un minimum local ou un maximum local, on est amené à étudier plus finement les variations de f autour de de x_0 en calculer la dérivée de f' en ce point.

Définition 8: Dérivée seconde

La fonction f est **dérivable deux fois en** x_0 si f' est dérivable en x_0, c'est à dire lorsque la limite suivante existe,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0).$$

Le nombre $f''(x_0)$ est la **dérivée seconde de** f **en** x_0.
La fonction f est **dérivable deux fois sur un intervalle** $I =]a, b[$ si elle est dérivable deux fois en tout point de l'intervalle. On peut alors définir la **fonction dérivée seconde**, notée f'', sur I.

Si les fonction f, f' et f'' sont continues, cela signifie que localement, on peut approcher f par un trinôme du second degré autour de x_0,

$$\text{Pour } h \text{ très proche de } 0, \quad f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 f''(x_0).$$

Théorème 2: Dérivée seconde et variations

Si les fonction f, f' et f'' sont continues sur un intervalle $I =]a, b[$ et si x_0 est un point critique de f, alors :

- x_0 est minimum local si $f''(x_0) > 0$;
- x_0 est maximum local si $f''(x_0) < 0$.

La primitive d'une fonction.

Définition 9: Primitive

Une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle $I =]a, b[$ est une fonction F dont la dérivée est égale à f :

$$F' = f$$

4 Les fonctions de références

Définition 10: Trinôme du second degré

Un **trinôme du second degré** est une fonction P qui peut être définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels fixés, avec a non nul.

Un trinôme du second degré est une fonction continue et dérivable.

3: Forme canconique d'un trinôme

Pour tout trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, on peut trouver deux nombres réels α et β tels que pour tout réel x,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

4: Résoudre une équation du second degré

Pour tout trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, on définit $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** du trinôme. Une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ se résout à l'aide de Δ. Trois cas se présentent selon la valeur de Δ :

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a pour unique solution $\alpha = -b/(2a)$, et $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple *La fonction $P : x \longrightarrow 2x^2 + 4x - 6$ admet deux racines $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$*

Table 1: Dérivées et primitives des fonctions usuelles définies sur l'intervalle I. L'expression de la primitive est donnée à une constante additive près.

I	$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Condition
$\mathbb{R}$	λ	0	λx	$\lambda \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\mathbb{R}^*$	$1/x$	$1/x^2$	non défini	
$\mathbb{R}^*$	$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x^{3/2}$	
$\mathbb{R}$	$\exp x$	$\exp x$	$\exp x$	
$\mathbb{R}_+^*$	$\log x$	$1/x$	$x \log x - x$	

Définition 11: Logarithme néperien et exponentielle

- La fonction **logarithme néperien** log est l'unique primitive de la fonction $x \longrightarrow 1/x$ définie sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en $x_0 = 1$. Par définition cette fonction est strictement croissante (sa dérivée est strictement positive) et elle définit une bijection entre $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$,
$$\exp :]0, +\infty[\to \mathbb{R}.$$
- La fonction **exponentielle** exp est la fonction réciproque du logarithme néperien,
$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[,$$
c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\log(\exp(x)) = (x)$, et pour tout $y \in]0, +\infty[$, $\exp(\log(y)) = y$.

5: Régle de calcul avec log **et** exp

- Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
- Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Exercice 1

Déterminez le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$a.\ f(x) = \sqrt{x^2 + x - 30}, \qquad b.\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$c.\ f(x) = \frac{\sqrt{8 - x}}{x \log(x)}, \qquad d.\ f(x) = \frac{x^5}{1 + x^4}$$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans donner de justification concernant l'existence de cette dérivée)

$$a.\ f(x) = \frac{x^2}{4} - 3x^3 + x \log(x), \qquad b.\ f(x) = \frac{\exp(2x)}{x^2 - 1}$$

$$c.\ f(x) = \exp(-x) - \exp(x), \qquad d.\ f(x) = 1 + \frac{\log(x)}{x}$$

Exercice 3

Déterminez les maximums des fonctions suivantes :

$$a.\ f(x) = \exp(-(x - \mu)^2), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$b.\ f(x) = n \log(x) - \lambda x, \quad x \in]0, +\infty[$$

$$c.\ f(x) = x(1 - x), \quad x \in]0, 1[$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$ sont des constantes fixées.