Mathématiques pour la modélisation statistique

Calcul matriciel

Myriam Vimond (ENSAI)

Master Sciences du Numérique et du Sport

Update: 6 juillet 2022

Table des matières

1 Les matrices

Les mathématiques pour les matrices et les vecteurs sont appelées Algèbre Linéaire. En statistiques, on peut représenter les données par des tableaux de chiffres. On utilise l'Algèbre Linéaire est afin d'organiser les données et de décrire les manipulations qu'on veut leur faire subir.

Définition 1

Une **matrice** A peut être définie comme un tableau de nombres réels à m lignes et n colonnes (m et n sont des entiers naturels)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Les a_{ij} (avec $i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$) sont appelés les **coefficients** de la matrice.
L'ensemble des coefficients

$$L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$$

correspondent au **vecteur ligne** i de la matrice A. L'ensemble des coefficients

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

correspondent au **vecteur colonne** j de la matrice A.

La matrice A possède donc n colonnes et m lignes, on l'appelle une matrice $m \times n$. Les (L_i) et les (C_j) sont elles-mêmes des cas particuliers de matrices : les (L_i) font partie des matrices $1 \times n$; les (C_j) font partie des matrices $m \times 1$.

Exemple

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{est une matrice } 2\times 3,$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{sont des matrices } 2\times 2.$$

1: Règle de calculs sur les matrices

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, et $A=(a_{ij})$ une matrice $m\times n$, $\lambda\mathbf{A}$ est une matrice $m\times n$ définie par
$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$
- Soient $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ des matrices $m\times n$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ est une matrice $m\times n$ définie par
$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}).$$
Attention, on ne peut additionner deux matrices que si elles sont de même dimension !
- Soient $A=(a_{ij})$ une matrice $m\times p$ et $B=(b_{ij})$ une matrice $p\times n$, $C=\mathbf{AB}$ est une matrice $m\times n$ définie par
$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \qquad i=1\ldots m,\ j=1\ldots n.$$
Attention, nombre de colonne de A = nombre de ligne de B !
- Soit $A=(a_{ij})$ une matrice $m\times n$, **la matrice transposée** $C=\mathbf{A}^\top$ est une matrice $n\times m$ définie par
$$c_{ij}=a_{ji}, \qquad i=1\ldots n,\ j=1\ldots m.$$

L'addition de matrices est commutative et associative. Le produit de deux matrices n'est pas commutatif, généralement $AB \neq BA$.

Exemple (suite)

- *on ne peut pas additionner A et B car elles n'ont pas les mêmes dimensions.*
- $B-2I_2=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
- *on peut pas multiplier A par B*
- $BA=\begin{pmatrix} 10 & 8 & 8 \\ 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

- $A^{\top} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\times$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = B$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 0+2\times 2 & 1\times 1+2\times 3 \\ 3\times 0+4\times 2 & 3\times 1+4\times 3 \end{pmatrix} = AB$

$\times$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 1+1\times 3 & 0\times 2+1\times 4 \\ 2\times 1+3\times 3 & 2\times 2+3\times 4 \end{pmatrix} = BA$

Exercice 1

Calculer les produits de matrice suivants.

Le produit d'une matrice 3×1 par une matrice 1×3 donne une matrice 3×3 :

$\times$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	

Le produit d'une matrice 1×3 par une matrice 3×1 donne un réel (1×1) :

$\times$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	

Le produit d'une matrice 2×2 par une matrice 2×1 donne une matrice (2×1) :

$\times$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	

2 Matrices carrées

On considère dans cette section des matrices $n \times n$.

Définition 2

- Une matrice A est **carrée** lorsque le nombre de lignes est identique au nombre de colonnes :
  - les termes diagonaux de A sont $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$,
  - les termes non diagonaux de A sont $\{a_{ij}, i \neq j\}$.
- A est une matrice **diagonale** si tous les termes non diagonaux sont nuls, on peut alors noter,
$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}).$$
- La **matrice identité $\mathbf{I_n}$** est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont égaux à 1,
$$I_n = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots 1).$$
- Une matrice carrée A est **inversible** si il existe une matrice B de même dimension que A telle que $AB = BA = I_n$. Si B existe, alors elle est unique et on la note $\mathbf{A^{-1}}$.
- Une matrice carrée A est **symétrique** si $A^\top = A$.
- Une matrice carrée A est **symétrique positive** si
$$\text{pour tout vecteur colonne } x \in \mathbb{R}^n \text{ le réel } x^\top Ax \text{ est positif.}$$

Pour une matrice carrée A, on peut capturer des informations importantes sur la matrice en un seul nombre, appelé le **déterminant**
$$\det(A).$$
Le déterminant est utile pour résoudre des équations linéaires, pour inverser une matrice, et pour effectuer des changement de variables dans les intégrales (calcul d'aires). Nous éviterons la définition formelle du déterminant (qui implique des notions de permutations), nous nous limiterons au cas du determinant d'une matrice 2×2,
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2: Règles sur l'inversion des matrices

- Une matrice A n'est pas inversible si il existe un vecteur colonne $x \in \mathbb{R}^n$ non nul (dont au moins une des coordonnées est différente de 0) tel que Ax est le vecteur nul.
- Une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Exercice 2

Montrez que la matrice P n'est pas inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Déterminez laquelle des affirmation suivante est vraie pour la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice P est inversible, et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. La matrice P n'est pas inversible.

Exercice 4

Soit la matrice symétrique A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

1. Pour $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ vecteur colonne, montrez que $x^\top Ax = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$.
2. Établir que pour $a \neq 0$ que $x^\top Ax = a(x_1 - x_2b/a)^2 + x_2^2(c - b^2/a)$.
3. En déduire que A est symétrique positive si

$$a > 0, \quad \text{et} \quad ac - b^2 > 0.$$

3 Résolution de systèmes linéaires d'équation

Un système d'équations linéaires ou **système linéaire** (S) est une famille de n équations linéaires faisant intervenir p inconnues. Ces inconnues $x_1, x_1, \ldots x_p$ sont habituellement regroupées dans le membre de gauche de chacune des équations. Le membre de droite est alors composé de constantes. Ces constantes et les coefficients de ces équations sont des réels. Nous notons a_{ij} le coefficient de la variable x_j dans l'équation (i) et b_i la constante dans le membre de droite de l'équation (i).

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 & (2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & (n) \end{cases}$$

On peut réécrire ce système sou forme matricielle : $AX = B$ c'est à dire,

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}^{B}$$

L'objectif est de trouver les solutions d'un tel système. Trois cas peuvent se présenter :

1. il n'y a pas de solution ;
2. il existe une unique solution pour chaque inconnue, la solution X est unique ;
3. il existe une infinité de solution.

Pour les besoins du cours, nous nous limitions au cas où $n = p$.

Théorème 1

Pour $n = p$, le système (S) admet une unique solution si et seulement si la matrice A est inversible. L'unique solution est alors,

$$X = A^{-1}B$$