Mathématiques pour la modélisation statistique

Les bases du calcul

Myriam Vimond (ENSAI)

Master Sciences du Numérique et du Sport

Update: 5 juillet 2022

Table des matières

1 Les ensembles

Ensembles de nombres Pensons, dans la vie courante, à un sac contenant un certain nombre d'objets, de quelle que nature que ce soit. En mathématiques, on emploiera le terme *ensemble* au lieu de sac, et le termes *éléments* au lieu des objets. Les ensembles de nombres les plus couramment utilisés sont rappelés ici.

Définition 1

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres **entiers naturels** (positifs) :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres **entiers relatifs** (positifs et négatifs) :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres **réels** : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres **réels positifs** : $\mathbb{R} = [0, +\infty[$

$\mathbb{R}_-$ désigne l'ensemble des nombres **réels négatifs** : $\mathbb{R} =]-\infty, 0]$

$\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres **réels non nuls** : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\setminus\{0\}$

La théorie des ensembles La théorie des ensembles utilise un langage spécifique, dont on ne donne ici qu'un bref aperçu.

Définition 2

Si x désigne un nombre et E un ensemble, on note :

- $x \in E$ si le nombre x **appartient** à l'ensemble E ;
- $x \notin E$ si le nombre x **n'appartient pas** à l'ensemble E ;
- l'ensemble vide $\emptyset$ est le sous ensemble de E ne contenant aucun élément.

Si A et B sont deux ensembles, on écrit $A \subset B$ si l'ensemble A est **inclus** dans l'ensemble B, c'est à dire si tous les éléments de A appartiennent à l'ensemble B.

Exemple

- $0 \in \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $1/2 \in \mathbb{R}$, $1/2 \notin \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$
- *l'ensemble* $A = \{2, 4\}$ *est inclus dans l'ensemble* $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1: Règle de calculs sur les ensembles

Etant donné deux parties A et B de E,

- la réunion $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ est la partie de E formée des éléments appartenant à A ou à B
$$x \in A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$
- l'intersection $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ est la partie de E formée des éléments appartenant à la fois à A et à B
$$x \in A \cap B \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in A \text{ et } x \in B\}$$
- le complémentaire de A, $\mathbf{E} \setminus \mathbf{A}$, est la partie de E formée des éléments n'appartenant pas à A
$$x \in E \setminus A \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin A$$

Deux ensembles sont **disjoints** lorsque leur intersection est vide.

Exemple

- $\{2, 4\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$
- $\{2, 4\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4\}$
- $\{2, 4\} \cap \{5, 8\} = \emptyset$

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}$, et on considère les parties $A = [0, 1]$, $B =]1, 3[$ et $C = [-1, 1/2]$.

1. Décrire les parties $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap C$ et $B \cup C$.
2. Décrire les parties $A \cup B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus \{A \cup C\}$.

2 Notations condensées

Écrire $1 + 2 + 3$ est encore aisé et ne prend pas trop de place. Mais pour écrire la somme de tous les entiers compris entre 1 à 25, cela devient chronophage. Il existe une version condensée d'écrire cette somme.

Définition 3

Si $x_1, X_2, \ldots$ est une suite de nombre,

- la notation $x_1 + \ldots + x_n$ représente la somme de tous les termes de la suite dont l'indice est compris entre 1 et n ;
- la notation $x_1 \times \ldots \times x_n$ représente le produit de tous les termes de la suite dont l'indice est compris entre 1 et n.

Exemple $1 + 2 + \ldots 25$ *est la somme des entiers de* 1 *à* 25 *inclus.*
Le produit $1 \times 2 \times \ldots n$*, le produit des entiers de* 1 *à* n*, s'appelle* ***factorielle*** n *et se note* $n!$.

La notation avec des points de suspension peut prendre encore trop de place.

Définition 4

Si $x_1, X_2, \ldots$ est une suite de nombre,

- la notation $\sum_{i=1}^{n} x_i$ est la somme $x_1 + \ldots + x_n$ des n premiers termes de la suite de terme général u_i ;
- la notation $\prod_{i=1}^{n} x_i$ est le produit $x_1 \times \ldots \times x_n$ des n premiers termes de la suite de terme général u_i.

Les lettres majuscules $\sum$ ("sigma") et $\prod$ ("pi") ont donné naissances aux lettres S (comme "somme") et P (comme "produit") de notre alphabet. Nombres de lettres grecques sont très utilisées en mathématiques. Voici les plus importantes.

Minuscule	Majuscule	Prononcé	Français
α		alpha	a
β		beta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ϵ		epsilon	e
θ	Θ	thèta	th
λ	Λ	lambda	ℓ
π	Π	pi	p
σ	Σ	sigma	s
ϕ	Φ	phi	ph
χ		khi	ch
ω	Ω	omega	au

3 Indicateurs de synthèse

Pourcentages Prendre une fraction d'une quantité x, c'est multiplier x par cette fraction. En ramenant la fraction à un dénominateur égal à 100, on obtient alors un pourcentage.

Exemple

- *les trois quarts de* $x = 150\,g$ *représenter donc* $\frac{3}{4} \times x = 112.5\,g$.
- $\frac{3}{4} = 0.75 = \frac{75}{100}$ *soit* 75%

2: Calculer un pourcentage d'augmentation ou de baisse

Augmenter une valeur de t% correspond à sa multiplication par $1 + \frac{t}{100}$
Diminuer une valeur de t% correspond à sa multiplication par $1 - \frac{t}{100}$

Attention ! Les assertions suivantes sont **fausses** :

- "augmenter une quantité de t_1% puis de t_2% revient à l'augmenter de $(t_1 + t_2)$%" FAUX
- "une augmentation de 30% est entièrement compensée par une diminution de 30%" FAUX

Moyennes et écart-types

Définition 5

La **moyenne simple** de n valeurs $x_1, \ldots, x_n$ est

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Si à chaque valeur x_i est affectée un poids p_i, la **moyenne pondérée** est alors,

$$\overline{x} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

L'**écart-type** est une mesure de la dispersion des valeurs $x_1, \ldots, x_n$ autour de la moyenne $\overline{x}$:

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{p_1(x_1 - \overline{x})^2 + p_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + p_n(x_n - \overline{x})^2}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}}$$

Exercice 2

Utiliser le signe $\sum$ pour écrire les formules de la moyenne pondérée et de l'écart-type.

4 Algèbre

Addition et multiplication Soient a, b et c trois réels.

3: Règles sur l'addition et la multiplication

- L'addition est commutative et associative :

$$a + b = b + a, \qquad \text{et} \qquad a + (b + c) = (a + b) + c.$$

- La multiplication est commutative et associative.
- La multiolication est distributive par rapport à l'addition :

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

4: Règles commune en calcul algébrique

- Diviser par une fraction :

$$\frac{a}{b/c} = a \times \frac{c}{b}, \qquad \text{et} \qquad \frac{a/b}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}.$$

- Règle du produit nul :

$$a \times b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \{a = 0 \text{ ou } b = 0\}.$$

- Règle de simplification par un réel non nul : si $a \neq 0$

$$a \times b = a \times c \quad \Longleftrightarrow \quad b = c.$$

- Identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad \text{et} \qquad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Puissance entières Soient a un réel non nul et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel.

Définition 6

- $a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$: **la puissance n de a**
- $a^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \times \ldots \times \frac{1}{a}}_{n \text{ fois}}$: **la puissance $-n$ de a**
- $a^0 = 1$, $0^0 = 1$, $0^n = 0$, par convention.

5: Règles sur les puissances

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, et $n, p \in \mathbb{Z}$,

$$a^n \times a^p = a^{n+p}, \qquad (a^n)^p = a^{np} \qquad \text{et} \qquad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Définition 7

Tout réel strictement positif a possède exactement deux **racines carrées** opposées : ce sont les solution de l'équation $x^2 = a$ d'inconnue x.

Le réel noté $\sqrt{a}$ désigne la racine carrée positive de a.
On note également $\sqrt{a} = a^{1/2}$.

6: Règles sur les racines

- Le réel 0 n'a qu'une seule racine 0.
- Pour tous réels a, b strictement positifs,

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Inégalités Soient a, b, c et d des réels. L'ensemble des réels est muni d'une relation d'ordre pour comparer deux réels.

Définition 8

$$a \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \text{ est un réel positif.}$$

7: Règles sur les inégalités

- Addition d'un même réel : $a \leq b \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + c$
- Produit par un même réel $c > 0$: $a \leq b \quad \Longrightarrow \quad ac \leq bc$
- Produit par un même réel $c < 0$: $a \leq b \quad \Longrightarrow \quad ac \geq bc$
- Somme membre à membre :
  $\{a \leq b \text{ et } c \leq d\} \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + d$
- Produit membre à membre entre réels positifs :
  $\{0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq c \leq d\} \quad \Longrightarrow \quad ac \leq bd$

Exercice 3

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\frac{2}{\sqrt{2}}, \qquad (\sqrt{a})^2, \qquad \frac{(2/3)^3}{4/9},$$

$$\frac{2/n^4}{4/n}, \qquad \frac{t^3 + 3t^2}{t^3 - 9t}.$$

Exercice 4

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$3x^2(xy^2)^5, \qquad (\frac{(2xy^2)^3}{4x^4y^4}, \qquad (a^4b^{-6})^{3/2},$$

$$\frac{a^{-1} - b^{-1}}{ab^{-2} - ba^{-2}}, \qquad 3 \times 2^{7n+1} \times 2^{n+3} \times 3^{n-1}.$$

Exercice 5

Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{1-x}$$

Exercice 6

Trouver les x tels que

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2}{1-x}$$